Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics, 37, 3, 2025. (43-58)

Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

Society of Manufacturing Engineering of Iran

Study and Finite Element Simulation of the Bi-stability Phenomenon in Cylindrical Fiber-Reinforced Laminated Composites*

Research Article

Hadi Gourabi[1], Shahram Hadian[2]

10.22067/jacsm.2024.89435.1284

Abstract-- **This study aims to investigate the bi-stability phenomenon in cylindrical fiber reinforced laminated composite shells. The origin of bi-stability behavior could be found in particular anti-symmetric layup sequence and fibers orientation. First, the kinematic and constitutive equations are derived, based on Classical Laminate Plate Theory (CLPT). Afterwards, the layup sequence and the way it leads to bending and twisting decoupling would be described. The bi-stability will be explained due to existence of one local minimum of strain energy, which indicates the second stable state of the plate. Analytical equations are introduced in order to calculate the cylindrical shell's total strain energy under pure bending and the second stable state geometry and characteristics are derived from the strain energy plots and the local strain energy minimum position, which is depicted in the plots. Furthermore, a finite element simulation will be performed in order to verify the presented theory to explain the bi-stability phenomenon.**

Key Words. **Fiber reinforced laminated composites, Cylindrical shell, Antisymmetric layup sequence, Bi-stability, Strain energy**

1- Introduction

Fiber-reinforced multilayer composites are highly flexible in design due to factors such as the type of fibers and matrix, the angle of fiber placement, and the arrangement of layers. These composites have attracted researchers' attention for various applications, including sheets, beams, and shells [1,2].

Bi-stable structures are a type of composite that have specific applications due to their bi-stability. Bi-stable structures are those that have two stable states, and this phenomenon is usually possible for structures made from anisotropic materials. The phenomenon of bi-stability in cylindrical composite shells was first introduced in 1996 by Dayton Lovett at the Rola-Tube Laboratory of Cambridge University [3]. Lovett, using an asymmetric arrangement of fiber-reinforced layers in a specific order, developed a type of these shells that, unlike previous types which had only one stable state, had two stable states in the initial and rolled-up positions. Subsequently, Iqbal and Pellegrino provided estimates for strain energy and developed analytical models to explain the phenomenon of bi-stability in cylindrical composite shells [4]. Due to the complexities involved in fully explaining bi-stability through analytical relationships, Guest and Pellegrino used numerical solutions and finite element software for this purpose [5].

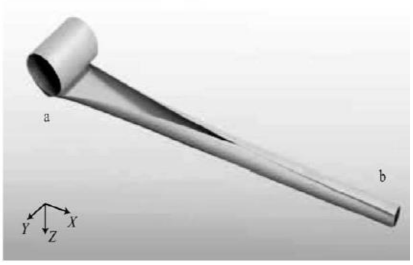


Figure 1. Slit-Tube/Tape-Spring boom

Bi-stable shells with a cross-section shaped like a sector of a circle and cylindrical form have great potential for use in deployable structures, especially as deployable booms. An example is shown in Figure 1. Various analyses have been conducted on these bi-stable structures. Shahriarifard and colleagues performed a thermal analysis of composite bi-stable shells and compared them with metallic types. This paper examines the phenomenon of bi-stability in cylindrical shells. First, the kinematic relations and governing equations based on classical multilayer theory are presented, and a matrix that relates strain and curvature to forces and moments is derived. The specific arrangement of layers and its relation to the independence of bending and twisting in the shell is also examined. The related equations for calculating the strain energy of the shell after deformation are provided, and the local

* Manuscript received September 29, 2024, Revised October 20, 2024, Accepted December 28, 2024.

[1] Researcher expert, Institute of Materials and Energy, Isfahan, Iran.

[2] Corresponding author. Assistant Professor, Faculty of Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

Email: shadian@eng.ui.ac.ir

minimum of the strain energy, indicating the second stable state, is determined from the strain energy diagrams. Furthermore, the phenomenon of bi-stability is investigated and confirmed through a finite element simulation, and the results are compared with theoretical calculations. Innovations in this paper include providing an analytical relationship for calculating the strain energy of the shell based on classical multilayer theory, considering the zero Gaussian curvature condition.

2- Theory

This paper aims to study multilayers, each layer of which is reinforced with fibers arranged parallel and unidirectional. The equivalent single-layer theory for composite plates is used to examine this subject, which includes the classical theory of multilayer plates and the first-order shear deformation theory for multilayer composite plates.

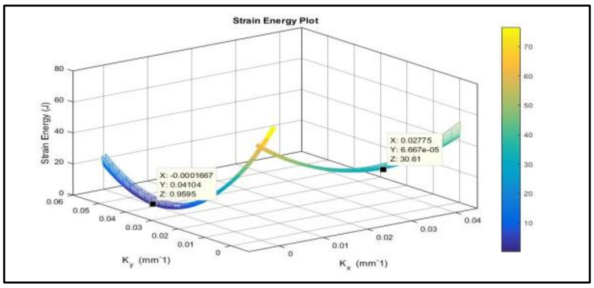


Figure 2. Strain energy vs curvature

3- Strain Energy Analysis

In this section, equations for calculating and estimating the strain energy of the shell under bending are provided. With this estimate, the strain energy of the shell in different states can be calculated and it can be examined whether the shell is in a local minimum of strain energy. A sample composite bi-stable shell is then examined, and its second stable state is determined from the strain energy diagrams. To determine the state of a cylindrical shell, only two parameters of curvature in the x and y directions are needed. With these two characteristics, the geometry of the shell after loading can be determined. It is also noted that due to the asymmetric arrangement of layers, bending and twisting will be separate; therefore, for a shell under bending, the principal directions of curvature will not change.

3-1- Strain Energy Diagrams and Bi-stability Radius

With the available relationship for strain energy, the strain energy of the shell in different states can be examined.

The strain energy diagram according to this relation is shown in Figure 2. Figure 2 displays the strain energy diagram based on curvature, at the boundary of zero Gaussian curvature. The strain energy in the initial state without any applied load, has the lowest value (zero strain energy). As the distance from the boundary of zero Gaussian curvature increases, the strain energy significantly increases. Moving towards the flat plate state, the strain energy gradually increases. Further, moving from the flat state along the x-axis, a local minimum of strain energy is observed again. This minimum represents the second stable state. The two points of minimum strain energy are marked on Figure 2.

4- Conclusion

In this work, the phenomenon of bi-stability in fiber-reinforced cylindrical composite shells was investigated. Initially, the history of bi-stability was introduced, and the potential for the widespread use of these types of composites in deployable structures was highlighted. Subsequently, assuming that the second stable state of the shell is a local minimum of strain energy, bi-stability analysis was conducted through both theoretical and finite element simulation approaches. Unlike most cases where the layers have a symmetric arrangement, here, by utilizing an asymmetric arrangement of layers, twisting and bending were separated, allowing the shell to have two different stable states with cylindrical geometry. Additionally, relationships for calculating the bi-stability radius as one of the main design parameters were provided. The high correlation between the strain energy calculated from theoretical and simulation approaches indicates the acceptability of the estimates considered and the accuracy of the simulation. Furthermore, the bi-stability radius obtained from theoretical and simulation approaches provides a suitable estimate that can be used for design purposes.

References

[1] S. S. Mojabi and M. M. Kheirikhah, "Modeling and intelligent control of vibration of cantilever composite plate embedded with shape memory alloy wires," Journal of Science and Technology of Composites, vol. 4, no. 4, pp. 363–374, 2018. https://doi.org/10.22068/jstc.2018.28554

[2] Z. Zamani and H. Haddadpour, "Static and dynamic analysis of composite thin walled beam with curvilinear fiber," *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 6, no. 1, pp. 79–88, 2019. https://doi.org/10.22068/jstc.2018.91728.1463

[3] K. Iqbal, S. Pellegrino, and A. Daton-Lovett, "Bi-stable composite slit tubes," in *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures: Theory and Applications: Proceedings of the IUTAM Symposium held in Cambridge, UK, 6–9 September 1998*, Springer, 2000, pp. 153–162. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9514-8_17

[4] K. Iqbal and S. Pellegrino, "Bi-stable composite shells," in *41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit held in Atlanta,GA, USA, 3- 6 April 2000*, 2000, p. 1385. https://doi.org/10.2514/6.2000-1385

[5] S. D. Guest and S. Pellegrino, "Analytical models for bistable cylindrical shells," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 462, no. 2067, pp. 839–854, 2006, doi: 10.1098/rspa.2005.1598. https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1598

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک
http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir
انجمن مهندسی ساخت و تولید ایران
دانشگاه فردوسی مشهد

مطالعه و شبیه‌سازی اجزای محدود پدیده دوپایایی در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه تقویت شده با الیاف*

مقاله پژوهشی

هادی گورابی(۱) شهرام هادیان(۲)

DOI: 10.22067/jacsm.2024.89435.1284

چکیده *مقاله حاضر به بررسی پدیده دوپایایی در پوسته‌های استوانه‌ای شکل کامپوزیتی چندلایه تقویت شده با الیاف می‌پردازد. علت اصلی پدیده دوپایایی در این سازه‌ها چینش نامتقارن و زاویه قرارگیری الیاف در این لایه‌ها است. ابتدا روابط سینماتیک و معادلات ساختاری ارائه داده می‌شوند. سپس ترتیب چینش نامتقارن لایه‌ها که منجر به استقلال پیچش و خمش می‌شوند توضیح داده می‌شود. وجود وضعیت پایدار دوم در سازه‌های دوپایا با توجه به وجود یک کمینه موضعی انرژی کرنشی در آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد، به طوری که سازه در نقطه کمینه انرژی کرنشی باقی‌مانده و به وضعیت پایدار اولیه خود باز نمی‌گردد. به همین منظور روابطی برای تعیین انرژی کرنشی کل پوسته ارائه می‌گردد و کمینه موضعی آن مشخص می‌شود. همچنین هندسه و شکل پوسته در وضعیت پایدار دوم از روی نمودارهای انرژی کرنشی تعیین می‌گردد. در ادامه شبیه‌سازی اجزای محدود ارائه می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی تطابق خوبی را با نتایج حاصل از روابط تئوری و نمودارهای انرژی کرنشی نشان می‌دهد. از جمله نوآوری‌های این مقاله می‌توان به ارائه یک رابطه تحلیلی برای محاسبه انرژی کرنشی پوسته بر پایه تئوری کلاسیک چندلایه‌ها و با در نظر گرفتن شرط انحنای گوسی صفر اشاره کرد.*

واژه های کلیدی کامپوزیت‌های چندلایه تقویت‌شده با الیاف، پوسته‌های استوانه‌ای، چینش لایه‌ای نامتقارن، دوپایایی، انرژی کرنشی.

مقدمه

کامپوزیت‌های چندلایه تقویت شده با الیاف به علت وجود عواملی مانند جنس الیاف و ماتریس، زاویه قرارگیری الیاف و ترتیب چینش لایه‌ها، از انعطاف‌پذیری زیادی در طراحی برخوردار بوده و مورد توجه محققان در کاربردهای متفاوت از جمله در ورق‌ها، تیرها و پوسته‌ها بوده‌اند [1,2].

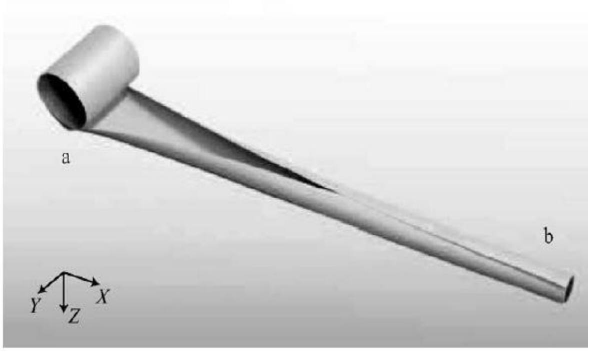
سازه‌های دوپایا یکی از انواع کامپوزیتها هستند که به خاطر خاصیت دوپایایی‌شان کاربردهای خاص دارند. سازه‌های دوپایا، به سازه‌هایی گفته می‌شود که دو حالت پایداری برای آن‌ها وجود دارد و معمولا این پدیده برای سازه‌هایی امکان‌پذیر است که از مواد ناهمسانگرد ساخته شده باشند. پدیده دوپایایی در پوسته‌های کامپوزیتی با مقطع استوانه‌ای برای اولین بار در سال ۱۹۹۶ توسط دیتون لاوت در آزمایشگاه رولا-تیوب (Rolla-Tube Lab) دانشگاه کمبریج معرفی شد [3]. لاوت با استفاده از چینش نامتقارن لایه‌های تقویت‌شده با الیاف با ترتیبی خاص، نوعی از این پوسته‌ها را ابداع کرد که بر خلاف انواع قبلی که تنها یک وضعیت پایدار داشتند، دارای دو حالت پایدار در وضعیت اولیه و رول‌شده بود. در ادامه اقبال و پلگرینو با ارائه تخمین‌هایی برای انرژی کرنشی، مدل‌های تحلیلی را برای توضیح پدیده دوپایایی در پوسته‌های کامپوزیتی استوانه‌ای ارائه کردند [4]. به‌علت پیچیدگی‌های موجود برای توجیه کامل دوپایایی توسط روابط تحلیلی، گست و پلگرینو از حل عددی و نرم‌افزارهای اجزای محدود به این منظور استفاده کردند [5]. مورفی و پلگرینو علاوه بر مباحث دوپایایی تحقیقاتی به‌منظور طراحی پوسته‌هایی با پایداری در تمامی وضعیت‌ها انجام دادند، به شکلی که پوسته دارای بی‌نهایت وضعیت پایدار است که با نام پایداری خنثی

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۳/۷/۸ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۳/۱۰/۸ می باشد.
(۱) محقق، پژوهشگاه مواد و انرژی، اصفهان، ایران.
(۲) نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران.
Email: s.hadian@eng.ui.ac.ir

(Neutral Stability) شناخته می‌شود [6].

طراحی سازه‌های انعطاف‌پذیری که توان سازگاری و تطبیق خود با محیط را داشته باشند، امروزه در بسیاری از پژوهش‌ها مورد توجه قرار گرفته است [7]. یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های پوسته‌های کامپوزیت با چینش نامتقارن لایه‌ها، قابلیت تغییرشکل های برون صفحه‌ای بزرگ در سازه است، به شکلی که در بعضی مواقع میزان آن به بیش از ۱۰۰ برابر ضخامت پوسته می‌رسد؛ بنابراین این نوع سازه‌ها می‌توانند دارای وضعیت پایدار دومی بسیار متفاوت نسبت به وضعیت اولیه خود باشند که همین مسئله باعث انعطاف‌پذیری بسیار در طراحی آن‌ها می‌شود [8]. بر خلاف انواع فلزی که تنها دارای یک حالت اولیه پایدار هستند، این پوسته‌های کامپوزیتی دارای دو وضعیت پایدار یکی در حالت گسترده اولیه و دیگری در حالت رول شده و تحت تنش هستند. از جمله مهمترین کاربردهای پدیده دوپایایی می‌توان به استفاده از آن در سازه‌های گسترش‌پذیر و مورف اشاره کرد، سازه‌هایی که طراحی و کاربرد آن‌ها بر پایه داشتن بیش از یک حالت پایدار است. به علت پایداری در دو وضعیت متفاوت، این سازه‌ها نیازی به قید و نگهدارنده برای باقی ماندن در وضعیت دوم خود ندارند [9].

پوسته‌های دوپایایی که مقطع آن‌ها به شکل قطاعی از دایره است و حالت استوانه‌ای شکل دارند پتانسیل بسیاری برای استفاده در سازه‌های گسترش‌پذیر (Deployable Structures) به خصوص به‌عنوان محور و تیرک‌های قابل گسترش دارند [10]. این نوع محور و تیرک‌های قابل گسترش معمولا با نام بوم (Boom) شناخته می‌شوند، نمونه‌ای از این بوم‌ها در شکل ۱) نشان داده شده است. تحلیل‌های مختلفی بر روی این سازه‌های دوپایا انجام شده است. شهریاری‌فرد و همکاران تحلیل گرمایی پوسته‌های دوپایای کامپوزیتی و مقایسه آن‌ها با انواع فلزی را به انجام رساندند [11]. به مرور ویژگی‌هایی مانند اصطکاک برای دقت بیشتر به شبیه‌سازی‌های انجام شده اضافه شد [12-15]. امروزه بوم‌های دوپایا عمدتا از کامپوزیت‌های چندلایه با ماتریس پلیمری و فیبرهای شیشه‌ای و کربنی ساخته می‌شوند [10,16]. به علت وجود متغیرهای زیادی که بر خواص مکانیکی پوسته‌ها، مخصوصا انواع کامپوزیتی آن، تأثیرگذار است، تحقیقاتی گسترده ای بر روی بهینه‌سازی آن‌ها با هدف بهبود مشخصات مکانیکی صورت گرفته است [17,18]. مورفی و همکاران با هدف گسترش کاربرد بوم‌های دوپایا در صنعت هوافضا، استفاده از بوم های دوپایا را به‌عنوان مکانیزم گسترشی برای آنتن‌ها معرفی کرده و موفق به ساخت نمونه‌ای از آن شدند [19]. یانگ و همکاران اقدام به بهینه‌سازی چندهدفه بوم‌های کامپوزیتی با مقطع C–شکل با بیشینه بودن گشتاور گسترش و کمینه بودن جرم کردند [20]. ملیکراچی همچنین اثرات میکرو مکانیک را در تحلیل‌ها برای کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف از پیش‌تنیده (Woven Composite) لحاظ کرد [21]. ارزیابی و تحلیل‌های دینامیک اولیه فرایند رول شدن و گسترش بوم‌های کامپوزیتی نیز توسط ملیکراچی پلگرینو انجام شد [22].



شکل ۱ بوم از نوع نواری فنری (Slit-Tube/Tape-Spring)

مقاله حاضر به بررسی پدیده دوپایایی در پوسته‌های استوانه ای می‌پردازد، ابتدا روابط سینماتیکی و معادلات حاکم بر پایه تئوری کلاسیک چندلایه‌ها، بیان می‌شود و ماتریسی که ارتباط بین کرنش و انحنا با نیروها و ممان‌ها را بیان می‌کند، استخراج می‌گردد. همچنین ترتیب به‌خصوص چینش لایه‌ها و ارتباط آن با استقلال خمش و پیچش در پوسته بررسی می‌شود. روابط مرتبط برای محاسبه انرژی کرنشی پوسته پس از تغییرشکل ارائه شده و کمینه موضعی انرژی کرنشی که بیانگر وضعیت پایدار دوم است از روی نمودارهای انرژی کرنشی مشخص می‌گردد. در ادامه پدیده دوپایایی توسط انجام یک شبیه‌سازی اجزای محدود بررسی و تأیید می‌شود و نتایج آن با محاسبات تئوری مقایسه می‌شود. از جمله نوآوری‌های این مقاله می‌توان به ارائه یک رابطه تحلیلی برای محاسبه انرژی کرنشی پوسته بر پایه تئوری کلاسیک چندلایه‌ها و با در نظر گرفتن شرط انحنای گوسی صفر اشاره کرد.

تئوری و معادلات حاکم

در این مقاله هدف بررسی چندلایه‌هایی است که هر لایه آن با الیافی که به‌صورت موازی و تک‌جهته در کنار یکدیگر قرار دارند تقویت شده، است. برای بررسی این موضوع از تئوری تک‌لایه معادل برای صفحات کامپوزیت (ESL: Equivalent Single Layers Theories) بهره گرفته می‌شود که شامل تئوری کلاسیک ورق‌های چندلایه و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای ورق های کامپوزیتی چندلایه (First Shear Deformation Theory (FSDT)) است.

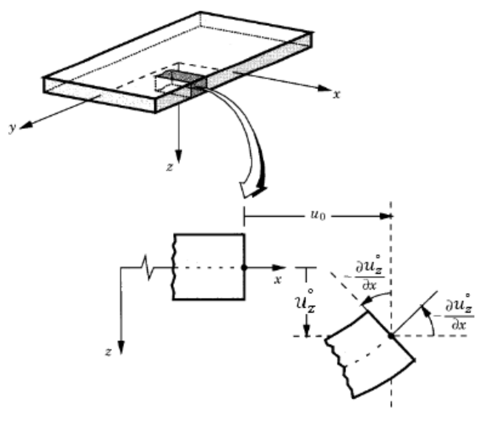
فرضیات سینماتیک

بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌های چندلایه که بر پایه جابه‌جایی توسعه یافته است، میدان جابه‌جایی مطابق رابطه

تعریف می‌گردد. که در آن بالانویس (°) به معنی تعلق به صفحه میانی و z بیانگر فاصله از صفحه میانی است. u_x، u_y و u_z جابه جایی در راستای محورهای اصلی دستگاه مرجع ورق هستند [24]، شکل ۲).

$$u_z = u_z^{\circ}(x.y)$$
$$u_x = u_x^{\circ}(x.y) - z\frac{u_z}{\partial x}$$
$$u_y = u_y^{\circ}(x.y) - z\frac{u_z}{\partial y}$$

(۱)



شکل ۲ دستگاه مختصات مورد استفاده برای میدان جابجایی رابطه

رابطه خطی بین کرنش و جابه‌جایی مطابق با رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

(۲)

معادلات ساختاری

به‌صورت کلی ارتباط بین تنش و کرنش مطابق با شکل تعمیم افته قانون هوک و به‌شکل ماتریسی مطابق با رابطه (۳) نوشته می شود که در آن σ و **ε** به‌ترتیب بیانگر تنش و کرنش هستند و ماتریس C با عنوان تانسور سفتی شناخته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{15} & C_{16}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{15} & C_{16}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{15} & C_{16}\\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{15} & C_{16}\\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{15} & C_{16}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{Bmatrix} \quad (۳)$$

ارتباط بین تنش و کرنش در یک تک‌لایه از یک چندلایه کامپوزیتی با اعمال کردن شرط تنش صفحه‌ای در دستگاه چندلایه به شکل رابطه (۴) نوشته می‌شود که $[\bar{Q}]$ ماتریس سختی کاهش افته لایه در دستگاه ورق کامپوزیتی است.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_{yy}\\\sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \quad (۴)$$

تا این مرحله معادلات ساختاری حاکم بر یک تک لایه در دستگاه ورق به دست آمد که بیانگر رابطه تنش و کرنش در لایه است. در ادامه معادلات حاکم بر ورق چندلایه کامپوزیتی بیان خواهد شد. رابطه (۵) ارتباط بین تنش‌های ورق کامپوزیتی را با نیروها و ممان‌ها بیان می‌کند. M بیانگر ممان‌ها، N نیروها، ε^0 کرنش صفحه میانی و k انحنای ورق می‌باشد.

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^{\circ}\} + [B]\{k\}$$
$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^{\circ}\} + [D]\{k\} \quad (۵)$$

که در آن ماتریس‌های A، B و D مطابق با رابطه (۶) تعیین می‌شوند.

$$[A] = \sum_{i=2}^{n}[\bar{Q}_i]\,(z_i - z_{i-1})$$

$$[B] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\bar{Q}_i]\ (z_i^2 - z_{i-1}^2)$$
$$[D] = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}[\bar{Q}_i]\ (z_i^3 - z_{i-1}^3)$$

(۶)

رابطه (۵) که بیانگر ارتباط بین نیرو و ممان با کرنش و انحنا است را می‌توان به شکل ماتریسی مطابق با رابطه (۷) بیان کرد. k_x و k_y به ترتیب انحنای پوسته در جهت x و y بوده و انحنای k_{xy} بیانگر پیچش صفحه می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

(۷)

برای راحتی ماتریس بلوکی فوق، ماتریس ABD، مطابق با نام بلوک‌های تشکیل دهنده آن نام‌گذاری می‌شود.

نقش بلوک‌های ماتریس ABD

در ارتباط با نقش بلوک‌های ماتریس *ABD* می‌توان موارد زیر را بیان کرد:

۱. ماتریس سختی A مستقل از ترتیب چیدمان لایه‌ها است.

۲. مقادیر غیر صفر A_{13} و A_{23} بیانگر یک رابطه محوری–برشی است، به این معنی که اعمال بار محوری منجر به وجود آمدن کرنش محوری و همچنین برشی می‌شود که در مواد همسانگرد ممکن نیست.

۳. بلوک‌های ماتریس B بیانگر وجود ارتباط بین انحنای ناشی از خمش و پیچش با بارهای محوری و جانبی (برشی–عرضی) است. عموما سعی بر این است که ماتریس B نزدیک به صفر اختیار شود که در ماتریس‌های متقارن این مطلب رخ می‌دهد.

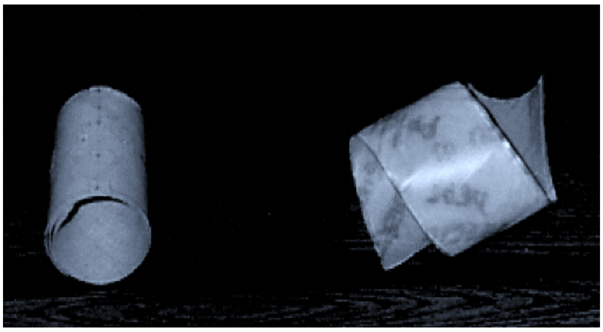
۴. مقدار بلوک D به شدت به چیدمان لایه‌ها وابسته بوده و غیر صفر بودن مقادیر D_{13} و D_{23} بیان کننده وجود ارتباط بین خمش و پیچش است.

ارتباط خمش و پیچش در ورق‌های کامپوزیتی

در یک ورق کامپوزیتی با چینش متقارن لایه‌ها، خمش و پیچش تنها در حالتی می‌توانند مستقل از هم باشند که لایه‌های تنها با زاویه ۰ و ۹۰ درجه در آن‌ها استفاده شود، در غیر این صورت اعمال ممان خمشی بر ورق منجر به پیچش آن نیز خواهد شد؛ این مسئله در شکل (۳) نشان داده شده است. این در حالی است که امکان مجزا کردن خمش و پیچش در ورق‌های کامپوزیتی نامتقارن فراهم است، به این شکل که مقابل هر لایه با زاویه θ در بالای صفحه میانی، یک لایه با زاویه θ- ، با فاصله برابر در طرف دیگر صفحه میانی قرار داشته باشد. با چینش نامتقارن لایه ها مطابق توضیح ارائه شده مقادیر درایه‌های D_{13} و D_{23} برابر با صفر می‌شود که این به معنی استقلال خمش از پیچش است.

اهمیت استقلال خمش از پیچش در کار حاضر در این مطلب است که پدیده دوپایایی در ورق تحت خمش مورد بررسی قرار می‌گیرد. و در محاسبات انرژی کرنشی، انرژی کرنشی ناشی از پیچش لحاظ نمی‌شود. به همین علت لازم است که پیچشی در ورق تحت خمش رخ ندهد. همچنین استقلال خمش از پیچش در یک پوسته استوانه‌ای به این معنی است که جهت‌های انحناهای اصلی (Principal Curvatures) در جهت طولی و عرضی پوسته قبل از بارگذاری تحت خمش، به علت نبود پیچش، تغییری نخواهند کرد و بر همان جهت‌های قبلی باقی خواهند ماند، در صورتی که یک چینش متقارن لایه‌ها منجر به فرم مارپیچ در وضعیت دوم خواهد شد.

به‌صورت معمول پوسته استوانه‌ای در وضعیت گسترده خود و بدون بارگذاری دارای انرژی کرنشی صفر و در وضعیت پایدار اول خود قرار دارد. با اعمال بار و تغییر وضعیت پوسته از وضعیت اولیه، به‌صورت پوسته تحت تنش قرار گرفته و میزان انرژی کرنشی آن افزایش میابد و در حالت ناپایدار قرار می‌گیرد. علت باقی ماندن پوسته در وضعیت دوم به این شکل توجیه می‌شود که پوسته در یک وضعیت کمینه موضعی انرژی کرنشی قرار دارد، به‌صورتی که با تغییر وضعیت محدود پوسته از وضعیت دوم، انرژی کرنشی پوسته افزایش میابد و بنابراین به کمینه موضعی، یعنی وضعیت پایدار دوم بازمی‌گردد. به بیان دیگر برای اثبات وجود وضعیت پایدار دوم باید نشان داده شود که یک کمینه موضعی انرژی کرنشی وجود دارد که پوسته در آن نقطه باقی می‌ماند.



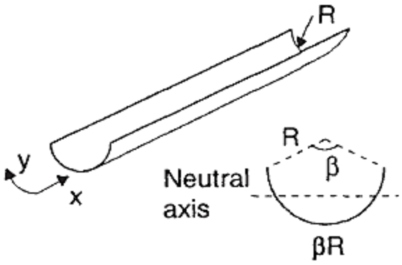
شکل ۳ مقایسه چیدمان متقارن (راست) و نامتقارن (چپ) لایه‌ها در بوم [23]

تحلیل انرژی کرنشی

در این بخش روابطی برای محاسبه و تخمین انرژی کرنشی پوسته تحت خمش ارائه می‌شود، با در دست داشتن این تخمین می‌توان انرژی کرنشی پوسته را در وضعیت‌های متفاوت محاسبه کرد و همچنین بررسی کرد که آیا پوسته در یک کمینه موضعی انرژی کرنشی قرار دارد یا خیر. در ادامه یک نمونه پوسته کامپوزیتی دوپایا مورد بررسی قرار گرفته و وضعیت پایدار دوم آن از روی نمودارهای انرژی کرنشی محاسبه می‌شود. برای تعیین وضعیت یک پوسته استوانه‌ای تنها به دو پارامتر انحنا در جهت x و y نیاز است، با در دست بودن این دو مشخصه می‌توان هندسه پوسته را بعد از بارگذاری مشخص کرد. همچنین اشاره شد که به علت چینش نامتقارن لایه‌ها خمش و پیچش مجزا خواهند بود، بنابراین برای یک پوسته تحت خمش، جهت‌های اصلی انحنا تغییری نخواهد کرد.

روابط انرژی کرنشی

در ادامه روابطی ارائه می‌شود که میزان انرژی کرنشی پوسته را بر پایه دو انحنای اصلی آن بیان می‌کند. قبل از ارائه روابط مربوط به محاسبه انرژی کرنشی، چند نکته باید مد نظر قرار بگیرد. با در نظر گرفتن پوسته مطابق شکل (۴) که در آن R شعاع و β زاویه مقطع پوسته است، در وضعیت ابتدایی $k_x = 0$ و $k_y = 1/R$ است. همچنین اشاره شد که تنها اثر خمش بر پوسته مورد بررسی قرار گرفته و خمش و پیچش به علت چینش به خصوص نامتقارن لایه‌ها مستقل هستند، بنابراین انحنای $k_{xy} = 0$ است و پیچشی رخ نمی‌دهد. همچنین انحناهای اصلی در تمامی پوسته به‌شکل یکنواخت لحاظ می‌شوند، بنابراین وضعیت پوسته تنها با معلوم بودن دو انحنای اصلی آن مشخص می‌شود. برای محاسبه انرژی کرنشی پوسته، انرژی کرنشی کل به دو بخش انرژی کرنشی ناشی از خمش و انرژی کرنشی ناشی از کشش تقسیم می‌شود.



شکل ۴ مقطع پوسته کامپوزیت دوپایا [4]

انرژی کرنشی ناشی از خمش

انرژی کرنشی ناشی از خمش در واحد سطح برای یک صفحه کامپوزیتی مطابق با رابطه (۸) بیان می‌شود.

$$u_b = \frac{1}{2}\,[k_x \quad k_y \quad k_{xy}]\ D \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{۸}$$

با توجه مجزا در نظر گرفته شدن خمش از پیچش، $k_{xy} = 0$ در نظر گرفته می‌شود. انحنای مقطع عرضی از 1/R در وضعیت اول به k_y در وضعیت دوم تغییر میابد و بنابراین مقدار u_b از رابطه (۹) محاسبه می‌شود.

$$u_b = \frac{1}{2}\left[\, D_{11}\, k_x^2 + 2\, D_{12}\, k_x \left(k_y - \frac{1}{R}\right) + D_{22}\left(k_y - \frac{1}{R}\right)^2\right] \tag{۹}$$

با توجه به یکنواخت بودن انحناها در پوسته، انرژی کرنشی در واحد طول پوسته (انرژی کرنشی ذخیره شده در پوسته‌ای با مقطع مشخص و طول یک متر) با ضرب رابطه (۹) در طول کمان βR و مطابق با رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$U_b = \frac{1}{2} R\beta\left[D_{11} k_x^2 + 2 D_{12} k_x \left(k_y - \frac{1}{R}\right) + D_{22}\left(k_y - \frac{1}{R}\right)^2\right] \tag{۱۰}$$

شکل ۵) مقطع پوسته را پس از تغییر وضعیت را نمایش می‌دهد.

انرژی کرنشی ناشی از کشش

رابطه (۱۱) انرژی کرنشی ناشی از کشش در واحد سطح برای یک صفحه کامپوزیتی را بیان می‌کند [24].

$$u_s = \frac{1}{2}\,[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]\ A \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_x$ و کرنش در امتداد x، $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ ، کرنش در امتداد y، کرنش

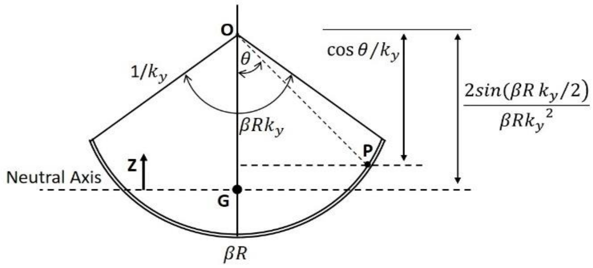
برشی ε_{xy}، مطابق رابطه (۱۲) لحاظ می‌شوند.

$$\varepsilon_y \approx 0\,;\ \varepsilon_{xy} = 0\,;\ \varepsilon_x = zk_x \qquad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲)، z فاصله نقطه P،

شکل ۵)، از تار خنثی مقطع پس از تغییرشکل است. مطابق با شکل ۵)، با استفاده از مختصات قطبی، فاصله P از تار خنثی طبق رابطه (۱۳) بیان می‌شود.

$$z = \overline{OG} - \overline{PO}\ \cos\theta = \frac{2\ \sin(\beta R\, k_y / 2)}{\beta R k_y^2} - \frac{\cos\theta}{k_y} \qquad (۱۳)$$



شکل ۵ مقطع پوسته پس از تغییرشکل

در نهایت رابطه (۱۱) به‌شکل رابطه (۱۴) بازنویسی می‌شود.

$$u_s = \frac{1}{2} A_{11}\, \varepsilon_x^2 = \frac{A_{11}}{2}\left[\frac{2\ \sin(\beta R\, k_y / 2)}{\beta R k_y^2} - \frac{\cos\theta}{k_y}\right]^2 k_x^2 \qquad (۱۴)$$

با انتگرال‌گیری بر روی کل مقطع، انرژی کرنشی ناشی از کشش پوسته با مقطع معین در واحد طول مطابق با رابطه (۱۵) به دست می‌آید.

$$U_s = \frac{A_{11}}{2}\left[\frac{\beta R}{2}\ \frac{k_x^2}{k_y^2} + \frac{\sin(\beta R k_y)}{2}\ \frac{k_x^2}{k_y^3} - \frac{4\ \sin^2(\beta R k_y / 2)}{\beta R}\ \frac{k_x^2}{k_y^4}\right] \qquad (۱۵)$$

با در دست داشتن دو تابع U_b و U_s، در نهایت انرژی کرنشی کل یک پوسته با مقطع معین در واحد طول پس از تغییر وضعیت، حاصل جمع ترم‌های انرژی کرنشی ناشی از خمش و کشش، مطابق با رابطه (۱۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$U = U_b + U_s \qquad (۱۶)$$

در صورت یافتن یک کمینه موضعی برای تابع به دست آمده می‌توان توجیهی برای وضعیت پایدار دوم یافت.

نمودارهای انرژی کرنشی و شعاع دوپایایی

با در دسترس بودن رابطه (۱۶) می‌توان انرژی کرنشی پوسته را در وضعیت‌های متفاوت بررسی کرد. در نتیجه می‌توان انرژی کرنشی کل را به صورت تابعی از دو انحنای k_x و k_y بیان کرد و آن را توسط نمودارهای انرژی کرنشی مورد بررسی قرار داد.

ضرب دو انحنای اصلی یک سطح به صورت انحنای گوسی (Gaussian Curvature) تعریف می‌شود. اگر تغییرشکل‌های یک سطح برای صفحه میانی به صورت غیرکششی یا تقریبا غیرکششی در نظر گرفته شود، به این تغییرشکل غیر کششی گفته می‌شود. برای پوسته استوانه‌ای اگر بار اعمالی تنها از نوع ممان در نظر گرفته شود، فرض غیرکششی بودن با تقریب خوبی قابل اعمال است. اگر سطحی دارای انحنای گوسی صفر باشد و تغییرشکل های صفحه میانی آن غیرکششی فرض شود، مقدار انحنای گوسی همواره ثابت بوده و تغییری نخواهد کرد.

نتیجه مطلب فوق این است که در نمودارهای انرژی کرنشی نیازی به بررسی تمامی مقادیر انحناهای اصلی برای یافتن کمینه موضعی نیست، بلکه تنها نیاز است مقادیری که دارای انحنای گوسی صفر هستند، یعنی حاشیه‌ای که ضرب انحناهای اصلی در آن صفر است، مورد بررسی قرار گیرند. همچنین برای تبدیل یک سطح با انحنای گوسی صفر به سطح دیگری با انحنای گوسی صفر تنها به خمش نیاز است.

مطابق توضیحات اگر پوسته استوانه‌ای تنها تحت خمش باشد، انحنای گوسی همواره صفر است [4]. در این حالت یکی از انحناهای اصلی حتما با صفر برابر خواهد بود و انحنای اصلی دیگری می‌تواند مقداری غیر از صفر داشته باشد. در این وضعیت هندسه پوسته تنها با مشخص بودن انحنای غیر صفر مشخص می‌شود، به بیان دیگر با در نظر گرفتن فرضیات گفته شده، وضعیت پوسته بعد از اعمال خمش همواره به صورت یک مقطع استوانه‌ای و یا در حالت خاص یک صفحه تخت خواهد بود. به همین علت تنها با داشتن شعاع مقطع پوسته تحت خمش می‌توان هندسه آن را در وضعیت‌های مختلف مشخص کرد. شعاعی که پوسته در کمینه انرژی کرنشی خود، به جز حالت گسترده، یا همان وضعیت پایدار دوم خود قرار دارد را شعاع دوپایایی

می‌نامند. بنابراین شعاع دوپایایی مهم‌ترین مشخصه حالت پایدار دوم است و با در دست داشتن شعاع دوپایایی، هندسه پوسته در وضعیت پایدار خود مشخص خواهد شد.

در این بخش پدیده دوپایایی در یک نمونه پوسته کامپوزیتی پنج لایه با چینش نامتقارن مورد بررسی قرار خواهد گرفت. جنس فیبر و ماتریس در تمامی لایه‌ها یکسان است. مشخصات مکانیکی لایه‌ها و زاویه قرارگیری فیبرها در لایه‌ها به‌ترتیب در جدول (۱) و جدول (۲) مشخص شده است. رابطه (۱۷) ماتریس ABD محاسبه شده برای پوسته را مشخص می‌کند.

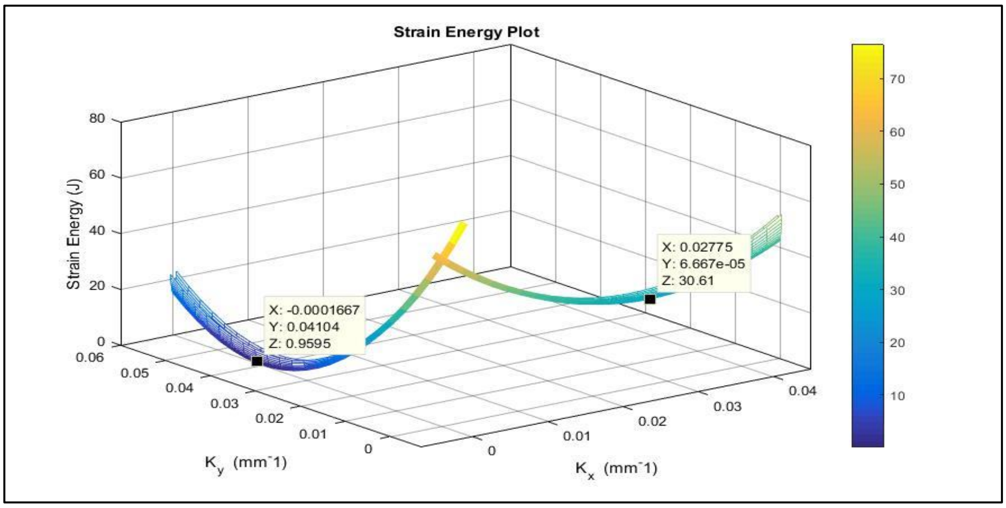
$$ABD = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 & 0 & 0 & -0.55 \\ 6 & 8.8 & 0 & 0 & 0 & -0.55 \\ 0 & 0 & 6.2 & -0.55 & -0.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 0.67 & 0.95 & 0 \\ -0.55 & -0.55 & 0 & 0 & 0 & 0.69 \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

وضعیت اولیه پوسته مطابق با شکل (۴) در نظر گرفته می‌شود که دارای انحنای k_x (شعاع اولیه r = ۲۵mm) و k_y می باشد. دقت شود که رابطه (۱۶) انرژی کرنشی کل پوسته با مقطع مشخص را در واحد طول ارائه می‌کند، بنابراین طول استوانه تاثیری در نتیجه نداشته و تنها انحناها معیار هستند.

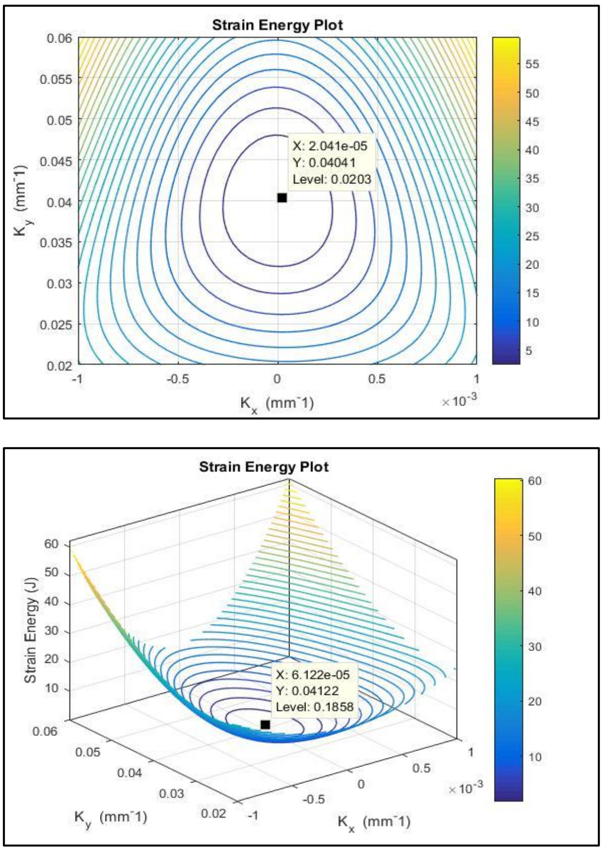
نمودار انرژی کرنشی مطابق با رابطه (۱۶) در شکل (۶) مشخص شده است. شکل (۶) نمودار انرژی کرنشی را بر پایه انحنا، در حاشیه انحنای گوسی صفر نمایش می‌دهد. انرژی کرنشی در وضعیت اولیه ((kx ≈۰ ky ≈۰/۰۴(r=۲۵mm))، بدون هیچ‌گونه اعمال بار، دارای کمترین مقدار (انرژی کرنشی صفر) است. با فاصله گرفتن از حاشیه انحنای گوسی صفر، انرژی کرنشی به صورت قابل توجهی افزایش میابد. با حرکت به سمت (kx ≈ 0 ky ≈0) که در واقع همان وضعیت صفحه تخت است، انرژی کرنشی به مرور افزایش میابد. در ادامه و با حرکت از وضعیت تخت در امتداد محور x، مجددا یک کمینه موضعی انرژی کرنشی مشاهده می‌شود. این کمینه همان وضعیت پایدار دوم است. دو نقطه کمینه انرژی کرنشی بر روی شکل (۶) مشخص شده‌اند.

به‌منظور بررسی دقیق‌تر و برای محاسبه شعاع دوپایایی، نقاط کمینه به‌طور خاص مورد بررسی قرار می‌گیرند. وضعیت اول و دوم پایداری پوسته در شکل (۷) و شکل (۸) نمایش داده شده اند.

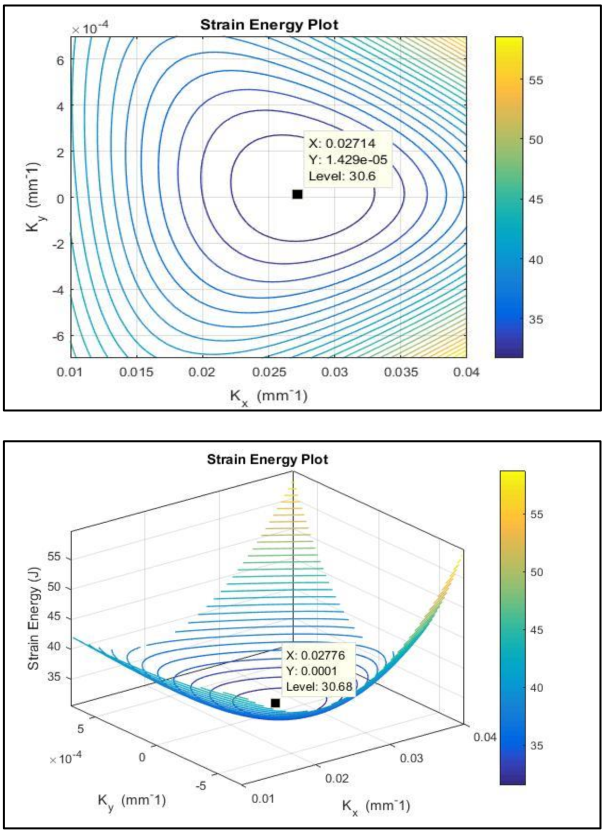
در حالت پایدار اول (kx ≈ 0 ky ≈۰/۰۴) یک کمینه U=0 J مشاهده می‌شود که وضعیت ابتدایی پوسته است. وضعیت دوم پایداری دارای (kx ≈۰/۰۲۷ ky ≈0) است. بنابراین شعاع دوپایایی در وضعیت دوم پایداری برابر با ($1/k_x$=۳۷mm) خواهد بود. مقدار انرژی کرنشی در وضعیت پایدار دوم برابر U =۳۰ J محاسبه می‌شود. با مشخص شدن انحنا در وضعیت پایدار دوم یا به بیان دیگر شعاع دو پایایی، وضعیت پوسته در حالت پایدار دوم خود تعیین شده و هندسه آن مشخص می‌گردد. بنابراین در طراحی سازه‌های دوپایا با استفاده از این روش می‌توان وضعیت پایدار دوم را تعیین نمود.



شکل ۶ نمودار انرژی کرنشی پوسته بر پایه انحنا



شکل ۷ نمودار انرژی کرنشی بر پایه انحنا – وضعیت پایدار اول



شکل ۸ نمودار انرژی کرنشی بر پایه انحنا – وضعیت پایدار دوم

شبیه‌سازی اجزای محدود

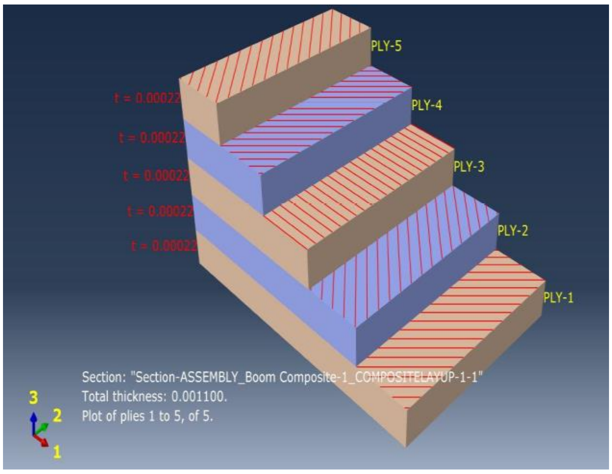
در این بخش پدیده دوپایایی برای پوسته‌های استوانه در نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس شبیه‌سازی می‌شود. ترتیب و زاویه قرارگیری فیبر در لایه‌ها و مشخصات مکانیکی پوسته کامپوزیتی، به‌ترتیب مطابق با جدول (۱) و جدول (۲) تعیین می‌گردد. شکل (۹) شمای قرارگیری لایه‌ها و زوایای فیبرها را در شبیه‌سازی نمایش می‌دهد.

جدول ۱ مشخصات مکانیکی لایه

پارامترها	توضیح	مقادیر (واحد)
E_1	مدول یانگ در امتداد فیبرها	۲۶/۵ (GPa)
E_2	مدول یانگ عمود بر جهت فیبرها	۳ (GPa)
G	مدول برشی	۱/۴ (GPa)
ν	ضریب پواسون	۰/۴

جدول ۲ زاویه قرارگیری فیبرها در ماتریس

شماره لایه	زاویه فیبر
۱	+۴۵
۲	−۴۵
۳	۰
۴	+۴۵
۵	−۴۵



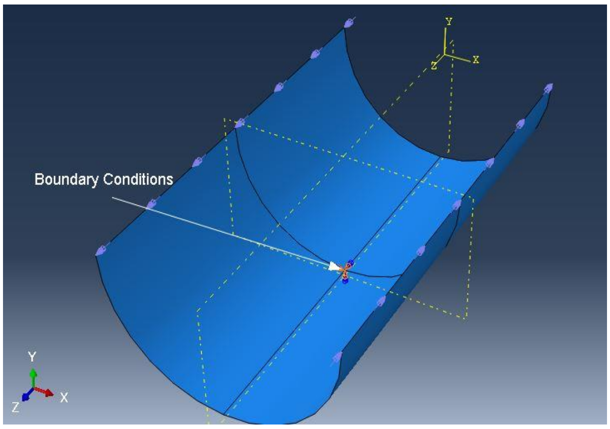
شکل ۹ ترتیب قرارگیری لایه‌ها و زوایای فیبرها در ماتریس

المان به کار گرفته شده از نوع المان استاندارد

S4R Elements است که برای مدل‌سازی عمومی پوسته‌ها و همچنین کاربردهای با کرنش بالا پیشنهاد می‌شود. با توجه به ساده بودن هندسه مدل، شبکه‌بندی از نوع Quad-Dominated و شبکه متوسط تعیین شده است. همچنین با توجه به جابه‌جایی گره‌ها و تغییرشکل در مقیاس بزرگ، در تمامی گام‌های حل گزینه هندسه غیرخطی لحاظ شده است.

هندسه و مشخصات مکانیکی

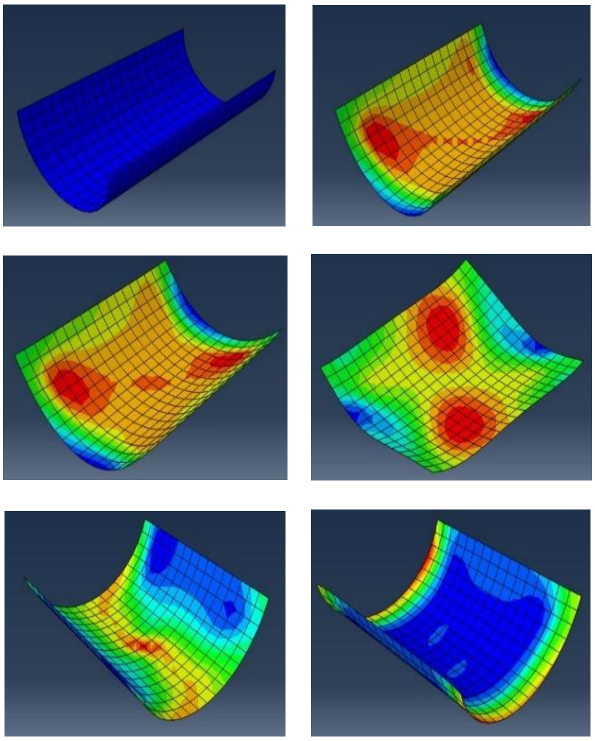
مشخصات و شرایط کامپوزیت در بخش مشخصات مکانیکی تعیین شده و به مدل ایجاد شده اختصاص میابد. شعاع اولیه پوسته برابر ۲۵ mm، طول پوسته برابر ۹۰ mm و زاویه مقطع (β=۱۸۰°) است. همچنین ضخامت لایه برابر با (t=۱,۱mm) اختیار می‌شود. همچنین به‌عنوان شرط مرزی، درجات آزادی نقطه مرکزی پوسته محدود شده و بار ممان خمشی بر لبه‌های پوسته اعمال می‌شود. مدل هندسی اولیه و شرط مرزی در شکل (۱۰) مشخص شده است.



شکل ۱۰ مدل هندسی و شرایط مرزی

گام‌های حل

دو گام حل بارگذاری و باربرداری تعریف می‌شود، ممانی از نوع "Shell_Edge_Load" با اندازه ۴۰ به لبه‌های پوسته کامپوزیتی اعمال می‌شود تا آن را از وضعیت پایدار اول به وضعیت پایدار دوم منتقل کند. در گام دوم حل یعنی باربرداری، تمامی بارگذاری ها غیرفعال شده و هیچ نیروی خارجی به پوسته اعمال نمی‌گردد. پس از باربرداری، پوسته به جای بازگشت به وضعیت اولیه، در وضعیت دوم پایدار خود باقی می‌ماند، به معنای دیگر پدیده دو پایایی در شبیه‌سازی تأیید می‌شود. در مورد بارگذاری باید به این نکته اشاره کرد که مقدار ممان اعمال شده باید توانایی انتقال پوسته به وضعیت پایدار دوم را داشته باشد، در غیر این‌صورت پس از باربرداری به وضعیت پایدار اول خود بازمی‌گردد. شکل (۱۱) مراحل تغییر وضعیت پوسته تحت ممان را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۱ مراحل انتقال پوسته از وضعیت پایدار اول به دوم

بررسی و تحلیل نتایج

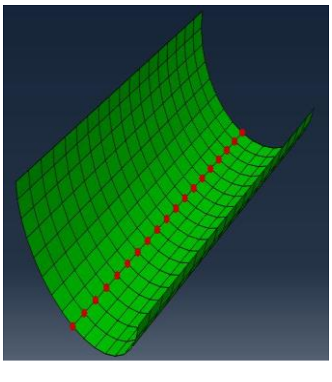
در این بخش نتایج به‌دست آمده از شبیه‌سازی اجزای محدود با نتایج به‌دست آمده از تئوری و نمودارهای انرژی کرنشی مقایسه می‌شوند تا صحت نتایج به دست آمده ارزیابی شوند. به همین منظور هندسه پوسته استوانه‌ای در حالت پایدار دوم خود و همچنین میزان انرژی کرنشی پوسته در این حالت مقایسه می‌شوند. برای بررسی شکل پوسته در وضعیت پایدار دوم شعاع های آن‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شوند. همچنین انرژی پوسته در وضعیت پایدار دوم از روی نمودارهای انرژی کرنشی خوانده می‌شود (محاسبه شده از رابطه (۱۶)) و در شبیه‌سازی با استخراج نمودار تغییرات انرژی کرنشی میزان آن در وضعیت پایدار دوم مشخص خواهد شد. در انتها با بررسی اختلاف بین این مقادیر، میزان دقت محاسبات و تخمین‌ها مشخص خواهد شد. توجه

شود که مقطع پوسته بررسی شده در بخش ۳ با مقطع پوسته شبیه سازی شده، زوایای قرارگیری الیاف، ترتیب چینش لایه‌ها و مشخصات مکانیکی کاملا یکسان است. بنابراین می توان نتایج را با یکدیگر مقایسه کرد.

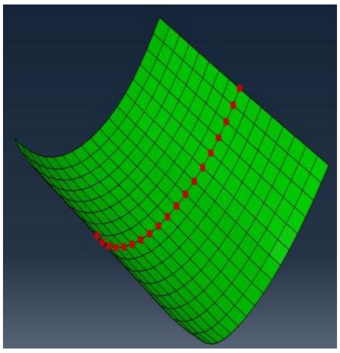
هندسه پوسته

همان‌طور که در بخش سوم توضیح داده شده، در وضعیت اعمال ممان خالص انحنای گوسی همواره صفر بوده و بنابراین برای مشخص شدن هندسه پوسته تنها به انحناهای اصلی نیاز است. با در نظر گرفتن صفر بودن یکی از انحناها، وضعیت پوسته با مشخص شدن انحنای دیگر یا نسبت عکس آن، که شعاع پوسته در وضعیت پایدار دوم است و با نام شعاع دوپایایی شناخته می‌شود تعیین می‌گردد.

شعاع دوپایایی از مسیر تئوری از روی نمودارهای انرژی کرنشی مطابق با شکل (۶) و به‌طور دقیق‌تر از شکل‌های (۷) و (۸) مشخص می‌گردد که بیانگر کمینه موضعی انرژی کرنشی در وضعیت پایدار دوم است. برای محاسبه شعاع دوپایایی در بخش شبیه‌سازی، از محل گره‌هایی روی خط میانی پوسته پس از تغییرشکل استفاده می‌شود. به این صورت که محل گره‌ها پس از تغییرشکل استخراج شده و موقعیت گره‌ها به‌عنوان ورودی به یک تابع برازش منحنی داده می‌شود، که شعاع نزدیک‌ترین دایره به نقاط ورودی را برمی‌گرداند. محل گره‌ها بر روی خط میانی در شکل (۱۲) مشخص شده است. با توجه به موقعیت به‌دست آمده نقاط مشخص شده بعد از بارگذاری، شعاع پوسته در وضعیت پایدار دوم از مسیر شبیه‌سازی برابر با ۴۲/۱۷mm محاسبه می‌گردد. نتایج به‌دست آمده از تئوری و شبیه‌سازی در جدول (۳) با یکدیگر مقایسه شده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۲ محل گره‌ها بر روی خط میانی پوسته در وضعیت پایدار اول (سمت راست) و وضعیت پایدار دوم (سمت چپ)

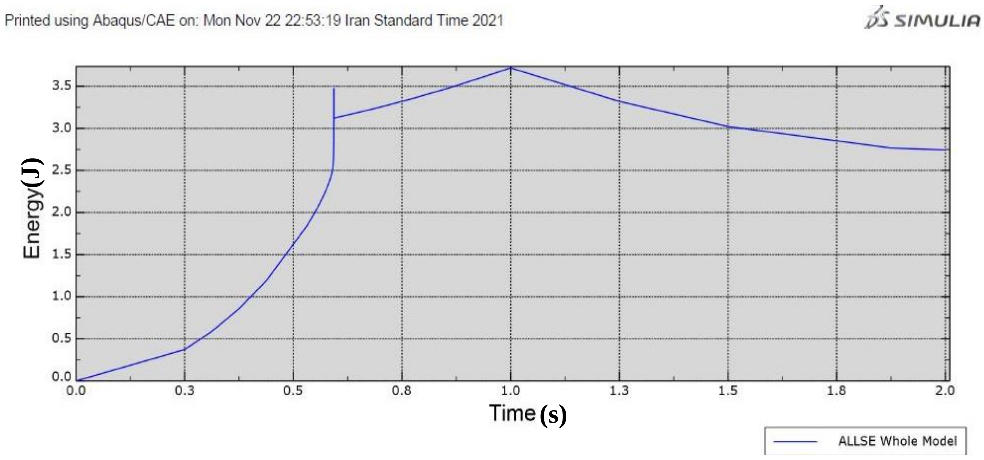
انرژی کرنشی پوسته

برای مقایسه انرژی کرنشی پوسته باید در نظر داشت که نمودارهای انرژی کرنشی بر پایه (۱۶) ترسیم شده‌اند که میزان انرژی کرنشی ذخیره شده در پوسته‌ای با مقطع معین و طول یک متر را به‌دست می‌دهد. این در حالی است که در شبیه‌سازی انجام شده با وجود اینکه مقطع پوسته و سایر مشخصات مشابه هستند طول پوسته شبیه‌سازی شده برای ساده‌تر بودن شبیه‌سازی کمتر از یک متر (۹۰ mm) است.

انرژی کرنشی پوسته در واحد طول در وضعیت پایدار دوم مطابق با شکل (۸) و برابر با ۳۰,۶۸ J/m به‌دست می‌آید. به‌منظور مقایسه نتیجه تئوری با شبیه‌سازی از نمودار تغییرات انرژی کرنشی پوسته در گام‌های حل مطابق با شکل (۱۳) استفاده می شود. با توجه به روند نمودار، در گام حل اول که بارگذاری انجام می‌شود و پوسته تحت خمش است، انرژی کرنشی افزایش می‌یابد. در گام حل دوم که بارگذاری‌ها لغو شده و پوسته در حالت کاملا آزاد قرار دارد، مشاهده می‌شود که انرژی کرنشی ابتدا روند کاهشی دارد اما به جای بازگشت به صفر، یا مقداری نزدیک به صفر، که بیانگر همان وضعیت پایدار اولیه است؛ در محلی با انرژی کرنشی مثبت (۲/۷۵ J) ثابت شده و در آنجا به صورت پایدار باقی می‌ماند که بیانگر وضعیت پایدار دوم است. برای مقایسه نتایج تئوری و شبیه‌سازی لازم است انرژی کرنشی پوسته در واحد طول بررسی شود، با در نظر گرفتن طول پوسته برابر با (۹۰ mm) در شبیه‌سازی، جدول ۳) مقدار انرژی کرنشی در واحد طول وضعیت پایدار دوم پوسته را در حالت تئوری و شبیه‌سازی را نشان می‌دهد.

جدول ۳ مقایسه نتایج تئوری با شبیه‌سازی

توضیح	محاسبات تئوری	شبیه‌سازی	درصد اختلاف
شعاع دوپایایی(mm)	۳۶/۰۲	۴۲/۱۷	۱۷/۱۳
انرژی کرنشی (J/m)	۳۰/۶۸	۳۰/۵۶	۰/۳۹



شکل ۱۳ نمودار تغییر انرژی کرنشی پوسته در گام‌های حل

نتیجه‌گیری

در کار حاضر، پدیده دوپایایی در پوسته‌های کامپوزیتی استوانه ای تقویت شده با الیاف مورد بررسی قرار گرفت. در ابتدا تاریخچه دوپایایی معرفی و به پتانسیل استفاده گسترده این نوع کامپوزیت‌ها در سازه‌های گسترش‌پذیر اشاره شد. در ادامه، با این فرض که وضعیت پایدار دوم پوسته یک کمینه موضعی انرژی کرنشی است، تحلیل دوپایایی از دو مسیر تئوری و شبیه‌سازی اجزای محدود انجام پذیرفت. برخلاف بیشتر موارد که لایه‌ها از چینش متقارن برخوردار هستند، اینجا با بهره‌گیری از چینش نامتقارن لایه‌ها پیچش و خمش از یکدیگر مجزا شده و پوسته می‌تواند دو حالت پایدار مختلف با هندسه استوانه‌ای داشته باشد. همچنین روابطی برای محاسبه شعاع دوپایایی به‌عنوان یکی از پارامترهای اصلی طراحی ارائه شد. تطابق بالای انرژی کرنشی محاسبه شده از مسیر تئوری و شبیه‌سازی بیانگر قابل قبول بودن تخمین‌های لحاظ شده و صحت شبیه‌سازی است، همچنین شعاع دوپایایی به‌دست آمده از مسیر تئوری و شبیه‌سازی تخمین مناسبی را به‌دست می‌دهد که می‌تواند به‌منظور طراحی از آن استفاده شود.

کار حاضر به بررسی دوپایایی و مشخصه‌های آن در حالت استاتیک پرداخت، نظر به این که یکی از پتانسیل‌های اصلی این نوع پوسته‌ها استفاده از آن‌ها در سازه‌های گسترش‌پذیر است و از پوسته‌های دوپایا به‌عنوان عملگر برای باز کردن سازه‌های گسترش‌پذیر استفاده می‌شود، لازم است که بررسی و تحلیل دینامیک پوسته‌های دوپایا نیز انجام شود، از جمله مقدار باری که می‌تواند در وضعیت دینامیک و در هنگام گشوده شدن تحمل کند. همچنین به‌منظور تکمیل کار حاضر می‌توان عوامل اتلاف انرژی را در روابط لحاظ کرد، در همین راستا در نظر گرفتن اثرات ویسکوالاستیک در شبیه‌سازی‌ها می‌تواند کارآمد باشد. با در نظر گرفتن اثرات ویسکوالاستیک، قسمتی از انرژی کرنشی ذخیره شده در ورق در هنگام گسترش دچار اتلاف شده و در نتیجه شعاع دوپایایی با دقت بهتری محاسبه می‌شود.

واژه‌نامه

نواری فنری	Slit-Tube/Tape-Spring
رولا-تیوب	Rolla-Tube Lab.
پایداری خنثی	Neutral Stability
سازه‌های گسترش‌پذیر	Deployable Structures
بوم	Boom

کامپوزیت پیش‌تنیده Woven Composite

تئوری تک‌لایه معادل برای صفحات کامپوزیت

ESL: Equivalent Single Layers Theories

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای ورق‌های کامپوزیتی چندلایه

First Shear Deformation Theory (FSDT)

انحناهای اصلی Principal Curvatures

انحنای گوسی Gaussian Curvature

تقدیر و تشکر

مراجع

[1] S. S. Mojabi and M. M. Kheirikhah, "Modeling and intelligent control of vibration of cantilever composite plate embedded with shape memory alloy wires," *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 4, no. 4, pp. 363–374, 2018. https://doi.org/10.22068/jstc.2018.28554

[2] Z. Zamani and H. Haddadpour, "Static and dynamic analysis of composite thin walled beam with curvilinear fiber," *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 6, no. 1, pp. 79–88, 2019. https://doi.org/10.22068/jstc.2018.91728.1463

[3] K. Iqbal, S. Pellegrino, and A. Daton-Lovett, "Bi-stable composite slit tubes," in IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures: Theory and Applications: Proceedings of the IUTAM Symposium held in Cambridge, UK, 6–9 September 1998, Springer, 2000, pp. 153–162. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9514-8_17

[4] K. Iqbal and S. Pellegrino, "Bi-stable composite shells," in 41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit held in Atlanta,GA, USA, 3- 6 April 2000, 2000, p. 1385. https://doi.org/10.2514/6.2000-1385

[5] S. D. Guest and S. Pellegrino, "Analytical models for bistable cylindrical shells," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 462, no. 2067, pp. 839–854, 2006. https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1598

[6] T. W. Murphey and S. Pellegrino, "A novel actuated composite tape-spring for deployable structures," in Proceedings 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, Palm Springs, CA, USA, Apr. 2004, p. 1528. https://doi.org/10.2514/6.2004-1528

[7] E. Rivas Adrover, *Deployable Structures*, London, UK: Laurence King Publishing, 2015. https://doi.org/10.5040/9781780677958

[8] F. Mehralian, "Analysis Cured Shape of Bistable Structures Using Analytical Method," M. Sc., Shahrekord University.

[9] A. Hajiesmaeili, "Analysis of Mechanical Behavior of Bistable Structures Using Finite Element Simulation," M. Sc., Shahrekord University, Shahrekord, 2012.

[10] T. W. Murphey, S. P. Lake, J. M. Fernandez, and S. Pellegrino, "High strain composites," in Proceedings 2nd AIAA Spacecraft Structures Conference, Kissimmee, FL, USA, Jan. 2015, p. 0942. https://doi.org/10.2514/6.2015-0942

[11] M. Shahryarifard, M. Golzar, and G. Tibert, "Toward thermal stimulation of shape memory polymer composite bistable tape springs," *Smart Materials and Structures*, vol. 30, no. 2, p. 025030, 2021. https://doi.org/10.1088/1361-665X/abd342

[12] A. Brinkmeyer, S. Pellegrino, and P. M. Weaver, "Effects of long-term stowage on the deployment of bistable tape springs,"

Journal of Applied Mechanics, vol. 83, no. 1, p. 011008, 2016. https://doi.org/10.1115/1.4031618

[13] A. Brinkmeyer, S. Pellegrino, P. M. Weaver, and M. Santer, "Effects of viscoelasticity on the deployment of bistable tape springs," in 19th International Conference on Composite Materials (ICCM-19), Montreal, QC, Canada, *July 2013*, 2013, pp. 370–380.

[14] M. E. Peterson and T. W. Murphey, "Large deformation bending of thin composite tape spring laminates," in Proceedings 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Boston, MA, USA, Apr. 2013, p. 1667. https://doi.org/10.2514/6.2013-1667

[15] K. Kwok and S. Pellegrino, "Viscoelastic effects in tape-springs," in Proceedings 52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, CO, USA, Apr. 2011, AIAA Paper 2011-2022. https://doi.org/10.2514/6.2011-2022

[16] F. Herlem, "Modelling and manufacturing of a composite bi-stable boom for small satellites," M.Sc. thesis, Dept. Aeronautical and Vehicle Eng., KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2014.

[17] H. Yang, R. Liu, Y. Wang, Z. Deng, and H. Guo, "Experiment and multiobjective optimization design of tape-spring hinges," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 51, no. 6, pp. 1231–1242, 2015. https://doi.org/10.1007/s00158-014-1205-9

[18] H. Ye, Y. Zhang, Q. Yang, Y. Xiao, R. V. Grandhi, and C. C. Fischer, "Optimal design of a three tape-spring hinge deployable space structure using an experimentally validated physics-based model," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 56, no. 5, pp. 1301–1315, 2017. https://doi.org/10.1007/s00158-017-1810-5

[19] T. W. Murphey, S. K. Jeon, A. Biskner, and G. E. Sanford, "Deployable booms and antennas using bi-stable tape-springs," in Proceedings 24th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, Logan, UT, USA, Aug. 2010.

[20] H. Yang, H. Guo, R. Liu, S. Wang, and Y. Liu, "Coiling and deploying dynamic optimization of a C-cross section thin-walled composite deployable boom," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 61, no. 4, pp. 1731–1738, Apr. 2020. https://doi.org/10.1007/s00158-019-02429-x

[21] H. M. Y. C. Mallikarachchi, "Predicting mechanical properties of thin woven carbon fiber reinforced laminates," *Thin-Walled Structures*, vol. 135, pp. 297–305, 2019. https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.11.016

[22] H. M. Y. C. Mallikarachchi and S. Pellegrino, "Deployment dynamics of ultrathin composite booms with tape-spring hinges," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 51, no. 2, pp. 604–617, 2014. https://doi.org/10.2514/1.A32401